ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ÉCOLES SUPÉRIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MÉCANIQUE-ÉLECTRICITÉ
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1981

PREMIÈRE INTERROGATION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA : Les six questions sont totalement indépendantes et peuvent être traitées dans un ordre arbitraire, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans cette épreuve, comme dans toutes celles qui suivront, la qualité de présentation est prise en compte : écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.

SUJET N° 1 -

Soit le polynôme $P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$ où les a_i sont n réels donnés distincts.

1/ Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{(1+x^2)^n}{[P(x)]^2}$.

2/ Montrer que pour que les primitives de $f(x)$ soient aussi des fractions rationnelles, il faut et il suffit que P vérifie une équation de la forme

$$A(x)\,P''(x) + B(x)\,P'(x) + \lambda P(x) = 0$$

où A et B sont des polynômes, λ une constante, et déterminer A, B, λ.

3/ En supposant cette condition vérifiée et $n = 3$, déterminer $P(x)$.

SUJET N° 2 -

Soit la forme quadratique à coefficients réels a_i supposés tous différents de 0 :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2 .$$

1/ Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice associée à $Q(x)$.

2/ Indiquer le rang et la signature de $Q(x)$.

3/ On suppose que l'espace est euclidien de dimension 3 et que la base utilisée est orthonormale. Donner une interprétation géométrique de la condition $Q(x) = 0$. En déduire la nature de la quadrique définie par cette équation. Discussion.

T.S.V.P.

SUJET N° 3 -

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, on considère l'endomorphisme

$$f(x,y,z,u) = (x - y + 2z - 2u, z - u, x - y + z, x - y + z) .$$

Soit e l'endomorphisme identique de $\mathbb{R}^4$. On demande :

1/ Les valeurs propres de f et une base de chacun des espaces propres correspondants E_1, E_2.

2/ Une base du noyau E_3 de f^2 et une base du noyau E_4 de $(e - f)^2$.

3/ De vérifier et de démontrer que $E_1 \subset E_3$, $E_2 \subset E_4$ et de vérifier que $E = E_3 \oplus E_4$:

4/ De déterminer une base de E par rapport à laquelle la matrice de f soit triangulaire.

5/ De résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 2z - 2u \\ \frac{dy}{dt} = z - u \\ \frac{dz}{dt} = x - y + z \\ \frac{du}{dt} = x - y + z \end{cases}$$

avec les conditions initiales x_o, y_o, z_o, u_o .

SUJET N° 4 -

On considère l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^p = E$ $(p \geqslant 2)$, muni d'une base ordonnée B.
A tout vecteur x de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ on fait correspondre le vecteur x' de coordonnées

$$x_i' = \frac{1}{p-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} x_j , \qquad i = 1, 2, \ldots, p .$$

1/ a) Montrer que l'on obtient ainsi un endomorphisme f de E.
b) Trouver la matrice A de f par rapport à B.

2/ I étant la matrice unité d'ordre p, Ω la matrice nulle, K la matrice dont tous les termes valent 1,

a) Montrer que $K^n = p^{n-1}K$ pour tout $n \geqslant 1$.
b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ existent des réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I$ et les calculer.
c) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
d) Montrer qu'existent des réels λ_1, λ_2 tels que $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = \Omega$ et les calculer.

SUJET N°5 -

L'espace est l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, a un réel donné. On demande :

1/ L'équation du plan tangent à la surface (S) engendrée par la droite (D), d'équations :

$$\begin{aligned} x &= z\cos t + a\sin t \\ y &= z\sin t + a\cos t, \\ z &= z \end{aligned}$$

au point M défini par $t = t_0$, $z = z_0$.

2/ Les équations de la courbe (C) de (S), engendrée par le point M, tel que le plan tangent en M soit perpendiculaire au plan tangent au point à l'infini de la droite (D) passant par M.

3/ Le trièdre de FRENET, la courbure et la torsion de la courbe (C) en M.

SUJET N°6 -

Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormal Oxy, un point M est soumis à une accélération centrale de centre O, de telle sorte que la condition

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right\| = \|\overrightarrow{OM}\|$$

soit constamment satisfaite au cours du temps $t(\geqslant 0)$.

On adoptera les notations

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \vec{\Gamma} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}, \Theta = (\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}), \rho = \|\overrightarrow{OM}\|, v = \|\vec{V}\|, \gamma = \|\vec{\Gamma}\|.$$

On suppose que $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ est fonction continue de t.

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, on a

$$\Theta = \frac{\pi}{4}, (\overrightarrow{OM},\vec{V}) = \frac{\pi}{2}, v = \rho = 1 \text{ et } \frac{d^2\rho}{dt^2} > 0.$$

1/ Calculer ρ en fonction de Θ. Préciser la nature géométrique de la trajectoire (C) de M.

2/ Déterminer les équations horaires $\Theta = f(t)$ et $\rho = g(t)$.

3/ Calculer γ.

4/ Calculer Γ_n, projection orthogonale de $\vec{\Gamma}$ sur la normale en M à la trajectoire.

5/ Exprimer en fonction de ρ le rayon de courbure de la trajectoire au point $M(\rho,\Theta)$.

6/ Déterminer l'hodographe du mouvement de M.

——— xox ———

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail